

Estados ligados em um potencial delta duplo via transformadas seno e cosseno de Fourier¹

(Bound states in a double delta potential via Fourier sine and cosine transforms)

A.S. de Castro²

Departamento de Física e Química,
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”,
Guaratinguetá, SP, Brasil

¹To appear in Revista Brasileira de Ensino de Física (Artigos Gerais)

²E-mail: castro@pq.cnpq.br

Resumo

O problema de estados ligados em um potencial delta duplo é revisto com o uso do método das transformadas seno e cosseno de Fourier.

Palavras-chave: duplo delta, estado ligado, transformadas seno e cosseno de Fourier.

The problem of bound states in a double delta potential is revisited by means of Fourier sine and cosine transforms.

Keywords: double delta, bound state, Fourier sine and cosine transforms.

1 Introdução

Em 1927, a quantidade $\delta(x)$ definida por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) = 1, \quad \delta(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \neq 0 \quad (1)$$

foi utilizada por P.A.M. Dirac para mostrar a equivalência entre três diferentes formalismos da mecânica quântica [1]. Embora seja atualmente conhecida como função delta de Dirac, tal quantidade apareceu pela primeira vez em trabalhos de O. Heaviside já em 1895 (veja, e.g., [2]). Conquanto $\delta(x)$ não seja uma função no sentido usual da palavra, ela pode ser entendida como o limite de uma sequência de funções, e a teoria das distribuições permite que ela possa ser considerada efetivamente como uma função ordinária [3]. A utilidade da função delta estende-se muito além de seu uso original em mecânica quântica e na definição de função impulsiva. É proveitosa no cálculo de soma de séries de Fourier [4] e de integrais [5], além de ser fundamental na busca de soluções particulares de equações diferenciais não-homogêneas com o método da função de Green (veja, e.g., [6]). Outrossim, a função delta tem serventia para simular funções com valores extremamente grandes em um intervalo extremamente pequeno e para generalizar o conceito de densidade associado com quantidades contínuas para quantidades discretas, sendo a densidade de massa de um objeto pontual um dos exemplos mais elementares. Em muitas circunstâncias, a razão da substituição de funções ordinárias por funções delta é porque, via de regra, tais modelos tornam-se mais simples, e às vezes exatamente solúveis [7]-[8]. De fato, as funções delta têm sido utilizadas em uma plethora de trabalhos em situações variadas em física estatística [9], eletromagnetismo [10], ótica [11], modelos nucleares [12]-[13], física do estado sólido [8], [14], física de partículas elementares [15], teoria do espalhamento [16], simulação do comportamento de átomos e moléculas [17]-[18], fotoionização [19], efeito Hall quantizado [20], física multidimensional [21], efeito Casimir [22], regularização e renormalização em teoria quântica de campos [23].

A equação de Schrödinger com um potencial constituído de uma soma de duas funções delta de Dirac, doravante denominado potencial delta duplo, tem sido usada na descrição da transferência de um núcleon de valência durante uma colisão nuclear [12] tanto quanto para para modelar as forças de troca entre os dois núcleos no íon de hidrogênio molecular [18]. A bem da verdade, os estados estacionários de uma partícula em um potencial delta duplo ocupa as páginas de muitos livros-texto [24]-[30]. Costumeiramente, os possíveis estados ligados são encontrados pela localização dos polos complexos da amplitude de espalhamento ou por meio de uma solução direta da equação de Schrödinger baseada na descontinuidade da derivada primeira da autofunção, mais a continuidade da autofunção e seu bom comportamento assintótico. Os estados ligados da equação de Schrödinger com potenciais delta também tem sido alvo de investigação tanto com a transformada de Laplace [31] quanto com a transformada exponencial de Fourier [32], e no caso de potenciais constituídos de funções delta de Dirac a equação de Schrödinger independente do tempo transmuta-se numa equação algébrica de primeira ordem para a transformada da autofunção. O uso de transformadas integrais para resolver uma equação diferencial é louvável se a equação transformada puder ser resolvida com maior simplicidade. No entanto, deve-se executar a inversão da transformada para obter a função original do problema. Esta última tarefa pode ser penosa mas é extremamente facilitada pelo uso de tabelas de integrais.

Neste trabalho usamos as transformadas seno e cosseno de Fourier na busca de soluções de estados ligados da equação de Schrödinger com o o potencial delta duplo. A abordagem

da equação de Schrödinger com o potencial delta duplo via transformadas seno e cosseno de Fourier fornece uma aplicação adicional do método de transformadas integrais em um problema físico simples que pode ser do interesse de professores e estudantes de física matemática e mecânica quântica dos cursos de graduação em física. O procedimento adotado envolve contato com equações diferenciais e o comportamento assintótico de suas soluções, função delta de Dirac, condições de contorno, paridade e extensões simétrica e antissimétrica de autofunções, degenerescência em sistemas físicos unidimensionais, *et cetera*.

2 As transformadas seno e cosseno de Fourier

As transformadas seno e cosseno de Fourier de $\phi(x)$, denotadas por $\Phi_S(k)$ e $\Phi_C(k)$ respectivamente, são definidas como [6]-[33]

$$\Phi_S(k) = \mathcal{F}_S\{\phi(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx \phi(x) \sin kx, \quad (2)$$

$$\Phi_C(k) = \mathcal{F}_C\{\phi(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx \phi(x) \cos kx,$$

e as transformadas inversas são dadas por

$$\phi(x) = \begin{cases} \mathcal{F}_S^{-1}\{\Phi(k)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk \Phi_S(k) \sin kx, \\ \mathcal{F}_C^{-1}\{\Phi(k)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk \Phi_C(k) \cos kx. \end{cases} \quad (3)$$

A existência das transformadas seno e cosseno de Fourier, e de suas inversas, é assegurada se as funções envolvidas nos integrandos forem absolutamente integráveis no intervalo $[0, \infty)$, e para isto acontecer $\phi(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$, e também $\Phi_S(k)$ e $\Phi_C(k)$ devem tender a zero quando $k \rightarrow \infty$. Neste caso, o teorema de Parseval garante que

$$\int_0^\infty dx |\phi(x)|^2 = \int_0^\infty dk |\Phi_S(k)|^2 = \int_0^\infty dk |\Phi_C(k)|^2. \quad (4)$$

Além disto, se $d\phi(x)/dx$ for também absolutamente integrável valerão as seguintes propriedades diferenciais

$$\mathcal{F}_S\left\{\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}\right\} = -k^2 \mathcal{F}_S\{\phi(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \phi(0), \quad (5)$$

$$\mathcal{F}_C\left\{\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}\right\} = -k^2 \mathcal{F}_C\{\phi(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \phi'(0),$$

onde

$$\phi(0) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \phi(x), \quad \phi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{d\phi(x)}{dx}. \quad (6)$$

Somente quatro integrais relacionadas com as transformadas seno e cosseno de Fourier de $\sin kc/(k^2 \pm d^2)$ e $\cos kc/(k^2 \pm d^2)$, serão necessários na análise dos estados ligados de um potencial delta duplo. Apesar de que apenas duas integrais sejam utilizados na expressão final das autofunções.

3 Os estados ligados de um potencial delta duplo

O potencial delta duplo simétrico pode ser visto como o caso limite de um potencial de poço (ou barreira) quadrado duplo como está ilustrado na Figura 1, onde L e θ são quantidades positivas. O limite apropriado deve ser realizado impondo $\theta \rightarrow 0$ e $|V_0| \rightarrow \infty$ de tal forma

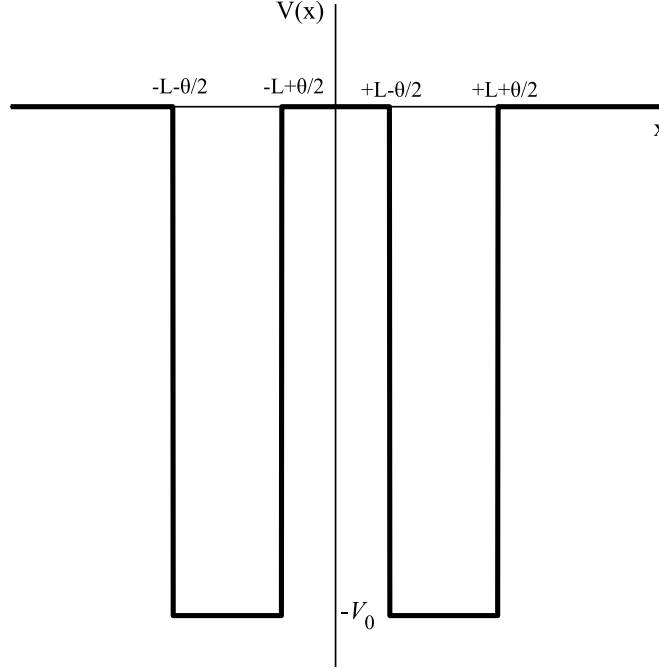


Figura 1: Esboço do poço duplo simétrico. Cada poço tem largura θ e profundidade V_0 .

que o produto θV_0 permaneça constante. Usando as definições

$$\alpha = \theta V_0 \quad (7)$$

e

$$a = \frac{\hbar^2}{2m\alpha L}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad (8)$$

a equação de Schrödinger independente do tempo para uma partícula de massa m sujeita a um potencial delta duplo simétrico

$$V(x) = -\alpha [\delta(x + L) + \delta(x - L)] \quad (9)$$

pode ser escrita na forma

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \frac{1}{aL} [\delta(x + L) + \delta(x - L)] \phi(x) + \kappa^2 \phi(x) = 0. \quad (10)$$

Para estados ligados, devemos procurar autofunções que se anulam à medida que $|x| \rightarrow \infty$. Tendo em vista que (9) é invariante sob reflexão através da origem ($x \rightarrow -x$), se $\phi(x)$ satisfaz à equação de Schrödinger para um dado E , assim acontece com $\phi(-x)$, e portanto também satisfazem as combinações lineares $\phi(x) \pm \phi(-x)$. Daí, assegura-se que autofunções com paridades bem definidas podem ser construídas, sendo suficiente concentrar a atenção sobre

o semieixo e impor condições de contorno adicionais sobre ϕ na origem. Autofunções em todo o eixo podem ser construídas tomando combinações lineares simétricas e antissimétricas de ϕ definida no lado positivo do eixo x :

$$\phi^{(\pm)}(x) = [\theta(x) \pm \theta(-x)]\phi(|x|), \quad (11)$$

onde $\theta(x)$ é a função degrau de Heaviside (1 para $x > 0$, e 0 para $x < 0$). Estas duas autofunções linearmente independentes possuem a mesma energia, então, em princípio, existe uma dupla degenerescência. Por causa da continuidade da autofunção e sua derivada em $x = 0$, as condições de contorno sobre ϕ na origem podem ser combinadas de duas formas distintas: a função par obedece à condição de Neumann homogênea $\phi'(0) = 0$, enquanto a função ímpar obedece à condição de Dirichlet homogênea $\phi(0) = 0$. Haja vista que $\phi(x)$ e $d\phi(x)/dx$ são nulas no infinito, temos a garantia da existência de $\mathcal{F}_S \{d^2\phi(x) dx^2\}$ e $\mathcal{F}_C \{d^2\phi(x) dx^2\}$ caso existam as transformadas de $\phi(x)$ e $d\phi(x)/dx$. As transformadas seno e cosseno de Fourier de (10) resultam em equações algébricas de primeiro grau:

$$\begin{aligned} (k^2 - \kappa^2) \Phi_S(k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\phi(L)}{aL} \sin kL + k\phi(0) \right], \\ (k^2 - \kappa^2) \Phi_C(k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\phi(L)}{aL} \cos kL - \phi'(0) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

A condição de contorno na origem dita qual o tipo de transformada é mais apropriado: transformada seno de Fourier para uma autofunção ímpar e transformada cosseno de Fourier para uma autofunção par. A transformada seno (cosseno) de Fourier atende à conveniência da autofunção ímpar (par) porque a transformada inversa requer $\phi(0) = 0$ ($\phi'(0) = 0$) como pode ser depreendido de (3). Destarte, obtemos as soluções

$$\begin{aligned} \Phi_S(k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\phi(L)}{aL} \frac{\sin kL}{k^2 - \kappa^2}, \quad \phi(-x) = -\phi(x), \\ \Phi_C(k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\phi(L)}{aL} \frac{\cos kL}{k^2 - \kappa^2}, \quad \phi(-x) = +\phi(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Das integrais tabeladas em [33] e transcritas em (A3) e (A4) concluímos sobre a inexistência de transformadas inversas no caso em que $\kappa \in \mathbb{R}$ ($E > 0$). Isto sucede porque a presença de $\cos \kappa x$ ou $\sin \kappa x$ faz com que $\phi(x)$ não seja absolutamente integrável. Entretanto, diante das integrais tabeladas expressas por (A1) e (A2), concluímos que a existência das transformadas inversas é assegurada para $\kappa = i\xi/L$ com $\xi > 0$ de tal forma que

$$E = -\frac{\hbar^2 \xi^2}{2mL^2}. \quad (14)$$

Neste caso, a transformada inversa de (13) pode ser obtida usando os resultados tabelados expressos por (A1) e (A2). Assim, para $\phi(-x) = +\phi(x)$ temos

$$\phi(x) = \phi(0) \times \begin{cases} \cosh \frac{\xi x}{L}, & |x| \leq L, \\ \cosh \xi e^{-\xi(|x|/L-1)}, & |x| \geq L, \end{cases} \quad (15)$$

onde

$$\phi(0) = \frac{\phi(L) e^{-\xi}}{a\xi}. \quad (16)$$

Por outro lado, para $\phi(-x) = -\phi(x)$ temos

$$\phi(x) = \frac{L}{\xi} \phi'(0) \times \begin{cases} \sinh \frac{\xi x}{L}, & |x| \leq L, \\ \varepsilon(x) \sinh \xi e^{-\xi(|x|/L-1)}, & |x| \geq L, \end{cases} \quad (17)$$

onde $\varepsilon(x)$ é a função sinal de x (+1 para $x > 0$, e -1 para $x < 0$), e

$$\phi'(0) = \frac{\phi(L) e^{-\xi}}{aL}. \quad (18)$$

Note que, considerando (15) e (17), podemos escrever

$$\phi(L) = \begin{cases} \phi(0) \cosh \xi, & \phi(-x) = +\phi(x), \\ \frac{L}{\xi} \phi'(0) \sinh \xi, & \phi(-x) = -\phi(x). \end{cases} \quad (19)$$

A consistência de (16), (18) e (19) requer que ξ seja solução das equações transcendentais

$$2a\xi = \begin{cases} 1 + e^{-2\xi}, & \phi(-x) = +\phi(x), \\ 1 - e^{-2\xi}, & \phi(-x) = -\phi(x). \end{cases} \quad (20)$$

A condição de quantização surgiu, além da exigência de normalizabilidade das autofunções, como uma necessidade de consistência no ajuste dos valores de $\phi(0)$, $\phi'(0)$ e $\phi(L)$. Há de se notar que a condição de quantização também poderia ter sido obtida pela fórmula de conexão entre $d\phi/dx$ à direita e à esquerda de $x = L$. Tal fórmula pode ser avaliada pela integração de (10) numa pequena região em redor $x = L$, e pode ser sumarizada por

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=L-\varepsilon}^{x=L+\varepsilon} = -\frac{\phi(L)}{aL}. \quad (21)$$

Já que as funções $1 + e^{-2\xi}$ e $1 - e^{-2\xi}$ são limitadas a valores positivos ao passo que $2a\xi$ é limitada a valores negativos quando $a < 0$, podemos inferir que não há possibilidade de solução para estados ligados se $a < 0$ (potencial repulsivo). Para um potencial atrativo ($a > 0$), a natureza do espectro resultante das soluções das equações transcendentais (20) podem ser visualizadas na Figura 2, onde constam esboços do membro direito de (20), e do lado esquerdo de (20) para $a = 3/2$ e $a = 1/4$. As curvas representadas por $1 + e^{-2\xi}$ e $2a\xi$ sempre se interceptam. Note que $1 - e^{-2\xi} \approx 2\xi$ para $|\xi| \ll 1$ e assim a curva representada por $2a\xi$ oscula a curva representada por $1 - e^{-2\xi}$ em $\xi = 0$ quando $a = 1$, e estas duas curvas se interceptam em algum ponto com abscissa $\xi > 0$ se e somente se $a < 1$. As abscissas das interseções de $1 \pm e^{-2\xi}$ e $2a\xi$ correspondem aos valores permitidos de ξ . Pode-se depreender da Figura 2 que sempre há uma e somente uma solução para o caso de uma autofunção simétrica, correspondendo à interseção das curvas $1 + e^{-2\xi}$ e $2a\xi$. A existência de uma adicional solução, necessariamente para o caso de uma autofunção antissimétrica, sucede tão somente quando $a < 1$, correspondendo à interseção das curvas $1 - e^{-2\xi}$ e $2a\xi$. Em todo caso, os valores

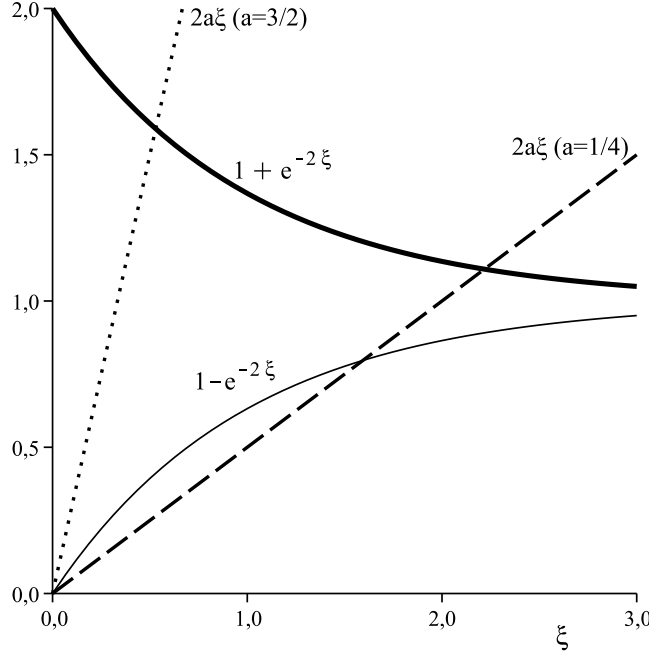


Figura 2: Esboço da condição de quantização $2a\xi = 1 \pm e^{-2\xi}$ para $a > 0$. Curva contínua espessa para $1 + e^{-2\xi}$. Curva contínua delgada para $1 - e^{-2\xi}$. Curva pontilhada para $2a\xi$ com $a = 3/2$, e curva tracejada para $2a\xi$ com $a = 1/4$.

permitidos de ξ aumentam à medida que a diminui. Além disto, o valor permitido de ξ para a solução ímpar é menor que o valor permitido de ξ para a solução par. A relação entre E e ξ dada por (14) permite concluir que a energia dos estados ligados diminui com o aumento de ξ e consequentemente a solução com autofunção par corresponde ao ubíquo estado fundamental. Relembrando a relação entre a , L e α dada por (8), podemos concluir que a existência de uma solução ímpar, correspondendo ao estado excitado, ocorre somente se o potencial for suficientemente forte ($\alpha > \hbar^2/2mL$). É também instrutivo observar que, para $a < 1$, o espectro torna-se degenerado no limite $\xi \rightarrow \infty$ ($E \rightarrow -\infty$) com $a \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow \infty$).

4 Comentários finais

Este trabalho apresentou uma abordagem alternativa para a busca de estados ligados do potencial delta duplo baseada nas transformações seno e cosseno de Fourier. Com essa abordagem a equação de Schrödinger independente do tempo transmutou-se em equações algébricas de primeira ordem para as transformadas da autofunção. O processo de inversão das transformadas tornou-se amigável porque as integrais envolvidas no procedimento estão presentes em tabelas, do contrário a abordagem, ainda que lícita, perderia o seu valor pedagógico.

Agradecimentos

O autor é grato ao CNPq pelo apoio financeiro. Um árbitro atencioso contribuiu com comentários e sugestões pertinentes para proscriver incorreções na primeira versão e facetar a presente versão deste trabalho.

A Integrais úteis

As fórmulas 3.742.1, 3.742.3, 3.742.6 e 3.742.8 da Ref. [33] são as integrais úteis para nossos propósitos:

$$\int_0^\infty dk \frac{\text{sen } kc \text{ sen } kx}{k^2 + d^2} = \frac{\pi}{2d} \times \begin{cases} e^{-cd} \text{senh } dx, & x < c, \\ \text{senh } cd e^{-dx}, & x > c, \end{cases} \quad (\text{A1})$$

$$\int_0^\infty dk \frac{\cos kc \cos kx}{k^2 + d^2} = \frac{\pi}{2d} \times \begin{cases} e^{-cd} \cosh dx, & x < c, \\ \cosh cd e^{-dx}, & x > c, \end{cases} \quad (\text{A2})$$

$$\int_0^\infty dk \frac{\text{sen } kc \text{ sen } kx}{k^2 - d^2} = \frac{\pi}{2d} \times \begin{cases} \cos cd \text{ sen } dx, & x < c, \\ \text{sen } cd \cos dx, & x > c, \end{cases} \quad (\text{A3})$$

$$\int_0^\infty dk \frac{\cos kc \cos kx}{k^2 - d^2} = -\frac{\pi}{2d} \times \begin{cases} \text{sen } cd \cos dx, & x < c, \\ \cos cd \text{ sen } dx, & x > c, \end{cases} \quad (\text{A4})$$

com $x > 0$, $c > 0$ e $d \in \mathbb{R}$.

Referências

- [1] P.A.M. Dirac, Proc. R. Soc. London A **113**, 621 (1927).
- [2] J.D. Jackson, Am. J. Phys. **76**, 704 (2008).
- [3] L. Schwartz, *Theorie des distributions* (Hermann, Paris, 1950); J.P. Marchand, *Distributions* (North-Holland, Amsterdam, 1962); I.M. Gel'fand and G.E. Shilov, *Generalized Functions* (Academic, New York, 1964).
- [4] M.R. Spiegel, J. Appl. Phys. **23**, 906 (1952).
- [5] M.R. Spiegel, J. Appl. Phys. **25**, 1302 (1954).
- [6] E. Butkov, *Física Matemática* (LTC, Rio de Janeiro, 1988).
- [7] Y.N. Demkov and V.N. Ostrovskii, *Zero-Range Potentials and Their Application in Atomic Physics* (Plenum, New York, 1988).
- [8] S. Albeverio *et al.*, *Solvable Models in Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1988).
- [9] A.E. Siegman, Am. J. Phys. **47**, 545 (1979).
- [10] V. Namias, Am. J. Phys. **45**, 624 (1977); D.T. Gillespie, Am. J. Phys. **51**, 520 (1983); D.G. Hall, Am. J. Phys. **63**, 508 (1995).
- [11] D. Marcuse, *Theory of Dielectric Optical Waveguides* (Academic, New York, 1974).
- [12] G. Breit, *Proc. Second Conf. Reactions between Complex Nuclei, Gatlinburg*, p.1 (Wiley, New York, 1960); G. Breit, Ann. Phys. (N.Y.) **34**, 377 (1965).
- [13] R. de L. Kronig and W.G. Penney, Proc. Roy. Soc. London A **130**, 499 (1931); S. Weinberg, Phys. Lett. B **251**, 288 (1990); S. Weinberg, Nucl. Phys. B **363**, 3 (1991).
- [14] S. Albeverio and R. Hoegh-Kronh, J. Oper. Theor. **6**, 313 (1981); J.E. Avron *et al.*, Phys. Rev. Lett. **72**, 896 (1994).
- [15] E.U. Condon, Phys. Rev. **49**, 459 (1936); C. Thorn, Phys. Rev. D **19**, 639 (1979).
- [16] I.R. Lapidus, Am. J. Phys. **37**, 930 (1969); I.R. Lapidus, Am. J. Phys. **37**, 1064 (1969); E. Kujawski, Am. J. Phys. **39**, 1248 (1971); P. Senn, Am. J. Phys. **56**, 916 (1988).
- [17] C.M. Rosenthal, J. Chem. Phys. **55**, 2474 (1971); I.R. Lapidus, Am. J. Phys. **43**, 790 (1975).
- [18] A.A. Frost, J. Chem. Phys. **25**, 1150 (1956).
- [19] S. Geltman, J. Phys. B **10**, 831 (1977); E.J. Austin, J. Phys. B **12**, 4045 (1979); H. Fearn and W.E. Lamb Jr., Phys. Rev. A **43**, 2124 (1991).
- [20] R.E. Prange, Phys. Rev. B **23**, 4802 (1981).

- [21] E. Demiralp and H. Beker, J. Phys. A **36**, 7449 (2003); S. Giardino, Rev. Bras. Ens. Fis. **35**, 3307 (2013).
- [22] L.A.S. Carrilho and J.A. Nogueira, Rev. Bras. Ens. Fis. **31**, 2311 (2009).
- [23] I. Mitra *et al.*, Am J. Phys. 66, 1101 (1998); R.M. Cavalcanti, Rev. Bras. Ens. Fis. **21**, 336 (1999).
- [24] S. Gasiorowicz, *Física Quântica* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro 1974).
- [25] C. Cohen-Tannoudji *et al.*, *Quantum Mechanics*, Vol.1 (Hermann, Paris 1977).
- [26] A. Galindo and R. Pascual, *Quantum Mechanics I* (Springer-Verlag, Berlin 1990).
- [27] K. Gottfried and T.-M. Yan, *Quantum Mechanics: Fundamentals*, 2nd. ed. (Springer, New York, 2003).
- [28] K. Tamvakis, *Problems & Solutions in Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
- [29] R.W. Robinett, *Quantum Mechanics*, 2nd. ed. (Oxford University Press, Oxford, 2006).
- [30] D.J. Griffiths, *Mecânica Quântica*, 2a. ed. (Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2011).
- [31] A.S. de Castro, Rev. Bras. Ens. Fis. **34**, 4301 (2012).
- [32] A.S. de Castro, Rev. Bras. Ens. Fis. **34**, 4304 (2012).
- [33] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, A. Jeffrey and D. Zwillinger (eds.), 7th ed. (Academic Press, New York, 2007).